نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری:

نام آزمون: ریاضی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۱۰/۰۲

نخبگان کوشا

۱) اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^{۲}-۴x+k=۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز x' و x'' باشد، کدام درست است؟

(۱) $x'x''>۴$ (۲) $x'x''>-۴$ (۳) $x'x''<-۴$ (۴) $x'x''<۴$

۲) در معادله‌ی $x^{۲}-۴x+۱=۰$ حاصل $\frac{۱}{x_{۲}}+\frac{۱}{x_{۱}}$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴) ۲

۳) مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(x-۱)^{۲}=(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۲}$ برابر است با:

(۱) -۲ (۲) ۲ (۳) $۲\sqrt{۳}$ (۴) $-۲\sqrt{۲}$

۴) معادله‌ی $-۶x^{۲}+۲x+k^{۲}+۳=۰$ دارای:

(۱) دو ریشه‌ی مثبت است. (۲) دو ریشه‌ی منفی است. (۳) دو ریشه‌ی مختلف العلامت است. (۴) ریشه‌ی حقیقی نیست.

۵) اگر $x_{۱}$ و $x_{۲}$ ریشه‌های معادله‌ی درجه ی دوم $x^{۲}-۳x-۴=۰$ باشند. حاصل $A=(x_{۱}{}^{۲}-۳x_{۱})^{۳}+(x_{۲}{}^{۲}-۳x_{۲})^{۳}$ کدام است؟

(۱) ۵۴ (۲) ۱۰۸ (۳) ۲۱۶ (۴) ۱۲۸

۶) اگر ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-px-۱=۰$ ثلث ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲}-۱۲x-۹q=۰$ باشد. حاصل pq کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۷) اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۱۰x+۰٫۱=۰$ باشند، حاصل $\log a+\log b-\log(a+b)$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ۱

۸) معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش $۳-\sqrt{۹-a}$ و $۳+\sqrt{۹-a}$ باشد، کدام است؟

(۱) $x^{۲}-۶x+a=۰$ (۲) $x^{۲}+۶x+a=۰$ (۳) $x^{۲}-۶x-a=۰$ (۴) $x^{۲}+۶x-a=۰$

۹) اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه دوم $۳x^{۲}-mx+m-۳=۰$ برابر -۲ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۳

۱۰) اگر دو معادله‌ی زیر دارای ۲ ریشه‌ی مساوی باشند، کدام $a-b$ است؟

$$\begin{cases} ۲x^{۲}-(a+۳)x+b=۰ \\ ۴x^{۲}-(۲b+۴)x+۳a-۲=۰ \end{cases}$$

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۹ (۴) -۹

پاسخنامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

برای داشتن دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باید $\Delta > ۰$ باشد. $(b^۲ - ۴ac > ۰)$

$$\Delta = ۱۶ - ۴k > ۰ \Rightarrow k < ۴ \Rightarrow x'x'' = \frac{c}{a} = k \Rightarrow x'x'' < ۴$$

۲ ۱ ۲ **۳** ۴

$$S = x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a} = ۴ \quad , \quad P = x_۱ \cdot x_۲ = \frac{c}{a} = ۱$$

$$\frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} = \frac{x_۲ + x_۱}{x_۱ x_۲} = \frac{۴}{۱} = ۴$$

۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$$(x - ۱)^۲ = (\sqrt{۲} - \sqrt{۳})^۲$$

$$\Rightarrow x - ۱ = \pm(\sqrt{۲} - \sqrt{۳}) \begin{cases} x - ۱ = \sqrt{۲} - \sqrt{۳} \Rightarrow x = ۱ + \sqrt{۲} - \sqrt{۳} \\ x - ۱ = -\sqrt{۲} + \sqrt{۳} \Rightarrow x = ۱ - \sqrt{۲} + \sqrt{۳} \end{cases}$$

حاصل جمع دو ریشه برابر ۲ می شود.

۴ ۱ ۲ **۳** ۴ چون $\frac{c}{a}$ منفی است $\left(\frac{k^۲ + ۳}{-۶} < ۰\right)$ پس دلتا حتماً مثبت است و معادله ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مختلف العلامت است.

۵ ۱ ۲ ۳ **۴**

$x_۱ , x_۲$ ریشه های معادله هستند پس در معادله صدق می‌کنند.

$$x_۱ \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} {x_۱}^۲ - ۳x_۱ - ۴ = ۰ \rightarrow {x_۱}^۲ - ۳x_۱ = ۴$$

$$x_۲ \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} {x_۲}^۲ - ۳x_۲ - ۴ = ۰ \rightarrow {x_۲}^۲ - ۳x_۲ = ۴$$

$$A = ({x_۱}^۲ - ۳x_۱)^۳ + ({x_۲}^۲ - ۳x_۲)^۳ = ۴^۳ + ۴^۳ = ۶۴ + ۶۴ = ۱۲۸$$

۶ ۱ ۲ **۳** ۴ معادله‌ی $۲x^۲ - ۱۲x - ۹q = ۰$ مفروض است، می خواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسیم که ریشه‌هایش ثلث ریشه‌های این معادله باشند. اگر y ریشه‌ی معادله‌ی جدید و x ریشه‌ی معادله‌ی قدیم باشد داریم:

$$y = \frac{x}{۳} \Rightarrow x = ۳y \xrightarrow{\text{معادله}} ۲(۳y)^۲ - ۱۲(۳y) - ۹q = ۰ \Rightarrow ۱۸y^۲ - ۳۶y - ۹q = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۱۸} y^۲ - ۲y - \frac{۱}{۲}q = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - \frac{۱}{۲}q = ۰$$

این معادله را با $x^۲ - px - ۱ = ۰$ مقایسه کرده و داریم:

$$p = ۲ \ , \ q = ۲ \Rightarrow pq = ۴$$

۷ **۱** ۲ ۳ ۴

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab} \quad , \quad \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \quad , \quad \log_k^{a^n} = n\log_k^a}$

$$a + b = S = -\frac{b}{a} = ۱۰ \quad , \quad ab = P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$\log a + \log b - \log(a + b) = \log\frac{ab}{a + b} = \log\frac{\frac{۱}{۱۰}}{۱۰} = \log\frac{۱}{۱۰۰} = \log ۱۰^{-۲} = -۲$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم معادله‌ی درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ است.

$$S = ۳ - \sqrt{۹ - a} + ۳ + \sqrt{۹ - a} = ۶$$

$$P = (۳ - \sqrt{۹ - a})(۳ + \sqrt{۹ - a}) = ۹ - (۹ - a) = a$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۶x + a = ۰$$

۹ ۱ **۲** ۳ ۴

ریشه‌ی معادله در معادله صدق می کند.

$$x = -۲ \Rightarrow ۳(-۲)^۲ - m(-۲) + m - ۳ = ۰ \Rightarrow ۳m = -۹ \Rightarrow m = -۳$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۳x - ۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = ۱ \end{cases}$$

۱۰ (۴) (۳) (۲) (۱) می‌دانیم شرط اینکه دو معادله‌ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ و $a'x^۲ + b'x + c' = ۰$ دارای دو ریشه‌ی مشترک باشند باید یک معادله مضربی از دیگری باشد یعنی داریم: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

$$\frac{۲}{۴} = \frac{-(a+۳)}{-(۲b+۴)} = \frac{b}{۳a-۲} \rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{a+۳}{۲b+۴} = \frac{b}{۳a-۲} \rightarrow \begin{cases} ۲a + ۶ = ۲b + ۴ \\ ۳a - ۲ = ۲b \end{cases} \rightarrow a = ۴, b = ۵$$

پس $a - b = -۱$ است.

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۴
۲	۳
۳	۲
۴	۳
۵	۴
۶	۳
۷	۱
۸	۱
۹	۲
۱۰	۱